《第２講　面積》

3　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の座標が，次のように与えられているとする．

$$(x(t),\ y(t))=(F(t)\cos t,\ F(t)\sin t)$$

ここで，$F(t)=\int_0^t e^{\theta}\sin\theta\, d\theta$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$t=0$，$t=\dfrac{\pi}{4}$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ における点 P の座標をそれぞれ求めよ．

(2)　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x(t)>0$，$y(t)>0$，$\dfrac{dy(t)}{dt}>0$ であることを示せ．

(3)　変数 t が $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき P によって描かれる曲線と，y 軸によって囲まれる図形の面積は，次の定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy(t)}{dt}\,dt$$

の値と等しいことを示せ．

4　曲線 $x^2-y^2=-4$ のうち $y>0$ を満たす部分を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 C の概形を漸近線も含めて描け．

(2)　$x=e^t-e^{-t}$，$y=e^t+e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることを示せ．

(3)　p を正の数とし，C 上の点 $\left(p,\ \sqrt{p^2+4}\right)$ を P とする．また原点を O とする．線分 OP と曲線 C と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(p)$ を求めよ．

(4)　$\displaystyle\lim_{p\to\infty}(S(p)-a\log p)=0$ となる定数 a を求めよ．ここで log は自然対数を表す．

《第２講　面積》

3　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の座標が，次のように与えられているとする．

$$(x(t),\ y(t))=(F(t)\cos t,\ F(t)\sin t)$$

ここで，$F(t)=\int_0^t e^{\theta}\sin\theta d\theta$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$t=0,\ t=\frac{\pi}{4},\ t=\frac{\pi}{2}$ における点Pの座標をそれぞれ求めよ．

(2)　$0<t<\frac{\pi}{2}$ のとき，$x(t)>0,\ y(t)>0,\ \frac{dy(t)}{dt}>0$ であることを示せ．

(3)　変数 t が $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲を動くときPによって描かれる曲線と，y 軸によって囲まれる図形の面積は，次の定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

の値と等しいことを示せ．

【答】　(1)　順に $(0,\ 0),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(0,\ \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}\right)$　　(2)　略　　(3)　略

【解説】　(1)　$F(t)=\int_0^t e^{\theta}\sin\theta d\theta$ より $F(0)=0$ なので $t=0$ に対応する点Pは $(0,\ 0)$．

$\left\{\frac{1}{2}e^{\theta}(\sin\theta-\cos\theta)\right\}'=e^{\theta}\sin\theta$ より

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left[\frac{1}{2}e^{\theta}(\sin\theta-\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$ なので $t=\frac{\pi}{4}$ に対応する点Pは $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$．

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[\frac{1}{2}e^{\theta}(\sin\theta-\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ なので $t=\frac{\pi}{2}$ に対応する点Pは

$\left(0,\ \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}\right)$．

(2)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき $e^{\theta}\sin\theta>0$ なので，$0<t<\frac{\pi}{2}$ のとき $F(t)>0$ である．

また $0<t<\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos t>0,\ \sin t>0$ なので $x(t)>0,\ y(t)>0$．

$y(t)=F(t)\sin t$ より

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= F'(t)\sin t+F(t)\cos t\\ &= e^t\sin t\times\sin t+F(t)\cos t\\ &= e^t\sin^2 t+F(t)\cos t\end{aligned}$$

なので，$0<t<\frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{dy(t)}{dt}>0$ となる．

(3)　$\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}=\alpha$ とおくと，(1)(2)の結果より求める面積は $\displaystyle\int_0^{\alpha} x\,dy$ となるが，$x=x(t)$，$y=y(t)$ と置換積分することにより $dy=\dfrac{dy(t)}{dt}dt$，(1)より $y=\alpha$ のとき $t=\dfrac{\pi}{2}$，$y=0$ のとき $t=0$ となることより

$$\int_0^{\alpha} x\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

であることが示された.

4　曲線 $x^2-y^2=-4$ のうち $y>0$ を満たす部分を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 C の概形を漸近線も含めて描け．

(2)　$x=e^t-e^{-t}$，$y=e^t+e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることを示せ．

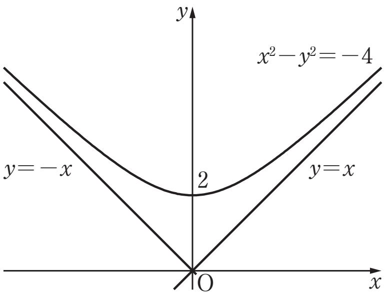
(3)　p を正の数とし，C 上の点 $\left(p,\ \sqrt{p^2+4}\right)$ を P とする．また原点を O とする．線分 OP と曲線 C と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(p)$ を求めよ．

(4)　$\lim_{p\to\infty}(S(p)-a\log p)=0$ となる定数 a を求めよ．ここで log は自然対数を表す．

【答】　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$2\log\dfrac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$　　(4)　2

【解説】　(1)　漸近線は $x^2-y^2=0$ より $y=\pm x$ であり，

$x^2-y^2=-4 \iff -\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$ であることと $y>0$ より概形は下図．



(2)　$x=e^t-e^{-t}$ より $\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$ (>0) であり $\lim_{t\to\infty}x=\infty$，$\lim_{t\to-\infty}x=-\infty$ より x は任意の実数値をとることができる．

このことと，$x+y=2e^t$，$-x+y=2e^{-t}$ より

$$
\begin{aligned}
&x+y>0 \text{ かつ } -x+y>0 \text{ かつ } (x+y)(-x+y)=4\\
\iff\ & y>-x \text{ かつ } y>x \text{ かつ } x^2-y^2=-4\\
\iff\ & x^2-y^2=-4 \text{ かつ } y>0
\end{aligned}
$$

となることより，$x=e^t-e^{-t}$，$y=e^t+e^{-t}$ が曲線 C の媒介変数表示であることが示された．

(3)　C は $y=\sqrt{x^2+4}$ と表せる．また $x=0$ のとき $0=e^t-e^{-t}$ より $t=0$，正の数 p に対して $x=p$ のとき $e^t-e^{-t}=p$ より

$$
\begin{aligned}
p=e^t-e^{-t} \iff\ & e^{2t}-pe^t-1=0\\
\iff\ & e^t=\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\\
\iff\ & t=\log\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\ (\text{これを }\alpha\text{ とする})
\end{aligned}
$$

であり $e^\alpha+e^{-\alpha}=\sqrt{(e^\alpha-e^{-\alpha})^2+4}=\sqrt{p^2+4}$ なので

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^p \sqrt{x^2+4}\,dx - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2} \\ &= \int_0^\alpha \sqrt{(e^t-e^{-t})^2+4}\,(e^t+e^{-t})\,dt - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2} \\ &= \int_0^\alpha (e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2} \\ &= \left[\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})+2t\right]_0^\alpha - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2} \\ &= \left[\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})+2t\right]_0^\alpha - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2} \\ &= \frac{1}{2}p\sqrt{p^2+4}+2\alpha - \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2} \\ &= 2\log\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} S(p)-a\log p &= 2\log\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} - a\log p \\ &= \log\frac{p^2+2+p\sqrt{p^2+4}}{2} - \log p^a \\ &= \log\frac{1+\frac{2}{p^2}+\sqrt{1+\frac{4}{p^2}}}{2}p^{2-a} \end{aligned}$$

なので $\lim_{p\to\infty}(S(p)-a\log p)=\begin{cases} \infty & (a<2 \text{ のとき}) \\ 0 & (a=2 \text{ のとき}) \\ -\infty & (a>2 \text{ のとき}) \end{cases}$　となる.

よって求める a の値は $a=2$.